

## Correction Devoir surveillé n°1

**Exercice 1 - Formulaire**

Déterminer parmi les assertions suivantes, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses (on ne demande pas de justifier la réponse)

Chaque bonne réponse apporte 1 point, chaque réponse fausse -1 point et aucune réponse 0 point

- a) FAUX   b) VRAI   c) FAUX   d) FAUX   e) VRAI   f) FAUX  
 g) FAUX   h) VRAI   i) FAUX   j) VRAI   k) FAUX   l) FAUX

**Exercice 2 - Équations et inéquations**

1. On cherche tout d'abord le discriminant de  $x^2 - 2x + 5$ , à savoir  $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$ . On résout alors l'équation sur  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 2x + 5} = x - 3 &\implies x^2 - 2x + 5 = (x - 3)^2 \\ &\implies x^2 - 2x + 5 = x^2 - 6x + 9 \\ &\implies 4x - 4 = 0 \\ &\implies 4(x - 1) = 0 \\ &\implies x = 1 \end{aligned}$$

On vérifie la solution  $x = 1$ . Or  $\sqrt{4} = 2 \neq -2$ . Donc 1 n'est pas solution de cette équation.

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_1 = \emptyset$ .

2. On résout l'inéquation suivante sur  $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} < \frac{2}{x+3} &\iff 0 < \frac{2(x-1)}{(x-1)(x+3)} - \frac{x+3}{(x-1)(x+3)} \\ &\iff 0 < \frac{x-5}{(x-1)(x+3)} \end{aligned}$$

On résout alors l'équation à l'aide d'un tableau de signe.

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$5$	$+\infty$
Signe de $x + 3$	-	0	+	+	+
Signe de $x - 1$	-	-	0	+	+
Signe de $x - 5$	-	-	-	0	+
Signe de $\frac{x-5}{(x-1)(x+3)}$	-	+	-	0	+

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_2 = ]-3; 1[ \cup ]5; +\infty[.$

3. On résout l'équation

$$e^x \geq x + 1 \iff e^x - x - 1 \geq 0$$

On pose alors la fonction  $f : x \rightarrow e^x - x - 1$ . Cette fonction est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On a alors pour tout  $x$  réel

$$f'(x) = e^x - 1$$

Or  $f'(x) \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$ . On a alors le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de $f$			

D'après le tableau de variations, on a pour tout  $x$  réel,  $f(x) \geq 0$ . On en déduit que  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ .

L'ensemble des solutions est donc  $\mathcal{S}_3 = \mathbb{R}$ .

4. Afin de résoudre l'équation  $|2x + 1| + |x - 2| = 4$ , on résout l'équation  $2x + 1 \geq 0 \iff x \geq -\frac{1}{2}$  et  $x - 2 \geq 0 \iff x \geq 2$ . On a donc 3 cas :

(a) **Cas où  $x < -1/2$**  : L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |2x + 1| + |x - 2| = 4 &\iff -(2x + 1) - (x - 2) = 4 \\ &\iff -3x + 1 = 4 \\ &\iff -3x = 3 \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Le nombre  $-1$  appartient à l'intervalle  $] -\infty; -1/2[$  donc  $-1$  est une solution.

(b) **Cas où  $-1/2 \leq x < 2$**  : L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |2x + 1| + |x - 2| = 4 &\iff 2x + 1 - (x - 2) = 4 \\ &\iff x + 3 = 4 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

Le nombre  $1$  appartient à l'intervalle  $[-1/2; 2[$  donc  $1$  est une solution.

(c) **Cas où  $2 \leq x$**  : L'équation s'écrit alors

$$\begin{aligned} |2x + 1| + |x - 2| = 4 &\iff 2x + 1 + x - 2 = 4 \\ &\iff 3x = 5 \\ &\iff x = 5/3 \end{aligned}$$

Or  $5/3$  n'appartient pas à l'ensemble considéré.

Au final l'ensemble des solutions est  $\mathcal{S}_4 = \{-1, 1\}$ .

### Exercice 3 - Démonstration par récurrence

1. On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{4^n \geq 1 + 3n\}$ .

- **Initialisation** : On a bien  $4^0 = 1 \geq 1 + 3 \times 0$  donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} & 4^n \geq 1 + 3n \\ \implies & 4^{n+1} \geq 4(1 + 3n) \\ \implies & 4^{n+1} \geq 4 + 12n \geq 4 + 3n \\ \implies & 4^{n+1} \geq 1 + 3(n+1) \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $4^n \geq 1 + 3n$ .

2. On considère la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2} \ln(u_n)$ . On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{1 \leq u_n \leq e\}$ .

- **Initialisation** : On a bien  $u_0 = 1$ ,  $1 \leq u_0 \leq e$  et donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} & 1 \leq u_n \leq e \\ \implies & 0 \leq \ln(u_n) \leq 1 \\ \implies & 0 \geq -\frac{1}{2} \ln(u_n) \geq -\frac{1}{2} \\ \implies & 2 \geq 2 - \frac{1}{2} \ln(u_n) \geq \frac{3}{2} \\ \implies & e \geq u_{n+1} \geq 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion** : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq u_n \leq e$ .

### Exercice 4 - Étude de fonctions

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - x - 1)e^x + e$$

On admet que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que produit de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . On a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x - 1)e^x + (x^2 - x - 1)e^x \\ &= (x^2 + x - 2)e^x \end{aligned}$$

2. On étudie le signe du trinôme  $x^2 + x - 2$ . Le discriminant est alors  $\Delta = 1 - 4 \times (-2) \times 1 = 9$ . Le trinôme a donc deux solutions

$$x_1 = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

On a donc le tableau de signe suivant

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+

3. Déterminez  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que  $f(x) = x^2 \left( a - \frac{b}{x} - \frac{c}{x^2} \right) e^x + e$ . En développant la formule de la fonction  $f$ , on obtient

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x + e$$

Par identification,  $a = 1$ ,  $b = -1$  et  $c = -1$ . Ainsi

$$f(x) = x^2 \left( 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) e^x + e.$$

4. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

On en déduit  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 1$ . Enfin,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

D'après la règle de multiplication,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

5. On calcule  $f(-2) = 5e^{-2} + e$  et  $f(1) = -e + e = 0$ . On en déduit alors le tableau de variation

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$	
Signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
Variations de $f$		$5e^{-2} + e$		$0$	$+\infty$

6. D'après le tableau de variation précédent, 0 est un minimum de la fonction :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0.$$

## Exercice 5 - Scilab

Les 3 questions sont indépendantes et par ordre de difficulté croissante.

1. On considère le programme

```
a = input('Entrez un réel')
b = a^2
a = b - 2*a
a = a + 1
disp(a)
```

- (a) Le programme ci-dessus demande à l'utilisateur d'entrer un réel  $a$  et calcule  $a^2 - 2a + 1$ .

- (b) Si l'utilisateur rentre la valeur 2, le programme affiche 1.
- (c) On résout  $a^2 - 2a + 1 = 0 \iff (a - 1)^2 = 0$  L'unique valeur de  $a$  pour laquelle l'ordinateur renvoie la valeur 0 est  $a = 1$ .

2. Au 13 Septembre 2019, le taux de change entre l'euro et les dollars américains, les livres sterling ou les roupies indiennes sont les suivants

- 1 EUR = 1,1075 USD
- 1 EUR = 0,8889 GBP
- 1 EUR = 78,6358 INR

Recopiez et complétez le programme suivant afin que lorsqu'un utilisateur entre une somme en euro et la monnaie dans laquelle il veut le change, il obtienne l'argent changé.

```
eur = input("Entrez la somme en euros")
change = input ("Entrez 1 si vous souhaitez obtenir le change en dollar. Entrez 2
si vous souhaitez obtenir le change en livres. Enfin, entrez 3 si vous souhaitez
obtenir le change en roupies.")

USD = ... 1.1075*eur ...
GBP = ... 0.8889*eur ...
INR = ... 78.6358*eur ...

if change == .. 1 .. then
    print("Avec " + str(..eur..) + " euros, vous obtenez " + str(USD) + " dollars")
elseif change == .. 2 .. then
    print("Avec " + str(.. eur ..) + " euros, vous obtenez " + str(GBP) + " livres")
else
    print("Avec " + str(.. eur ..) + " euros, vous obtenez " + str(INR) + " roupies")
```

3. On cherche à résoudre l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$ . Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  et qui affiche
- les 2 solutions si le discriminant est positif,
  - l'unique solution si le discriminant est nul,
  - Il n'y a pas de solution si le discriminant est négatif.

```
a = input("Entrez la valeur de a: ")
b = input("Entrez la valeur de b: ")
c = input("Entrez la valeur de c: ")
delta = b^2 - 4*a*c

if delta > 0 then
    x1 = (-b - sqrt(delta))/(2*a)
    x2 = (-b + sqrt(delta))/(2*a)
    disp("Il y a deux solutions " + string(x1) + " et " + string(x2) + ".")
elseif delta == 0 then
    x0 = -b / (2*a)
    disp("Il y a une unique solution : " + string(x0))
else
    disp("Il n'y a aucune solutions")
end
```

## Exercice 6 - Fonctions et suites

### Partie 1

On considère la fonction  $f(x) = \ln(e^x + e^{-x})$ .

1. On résout  $e^x + e^{-x} > 0$ . Or pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$  et  $e^{-x} > 0$ .

Donc le domaine de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .

2. Le domaine de définition de  $f$  est symétrique. Pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln(e^{-x} + e^{-(-x)}) \\ &= \ln(e^x + e^{-x}) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

La fonction  $f$  est paire.

3. La fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme et composée de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $x$  réel

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Or  $e^x + e^{-x} > 0$ , on s'intéresse alors au numérateur. On résout

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} \geq 0 &\iff e^x \geq e^{-x} \\ &\iff e^{2x} \geq 1 \\ &\iff 2x \geq 0 \\ &\iff \boxed{x \geq 0} \end{aligned}$$

On calcule les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

De même

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

Enfin,  $f(0) = \ln(e^0 + e^{-0}) = \ln(2)$ . On en déduit le tableau de variation suivant

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	$\begin{matrix} \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{matrix}$	$+$
Variations de $f$	$+\infty$	$\swarrow$ $\searrow$	$+\infty$
		$\ln(2)$	

4. On calcule pour  $x$  réel,

$$\begin{aligned}
 f(x) - x &= \ln(e^x + e^{-x}) - x \\
 &= \ln(e^x(1 + e^{-2x})) - x \\
 &= \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-2x}) - x \\
 &= x + \ln(1 + e^{-2x}) - x \\
 &= \ln(1 + e^{-2x})
 \end{aligned}$$

5. On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-2x} = 1$$

Finalement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = 0.$$

On a également

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + e^{-2x} = +\infty$$


Finalement

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^{-2x}) = +\infty.$$

6. On a  $f(x) > x \iff f(x) - x > 0$ . On pose alors la fonction  $g(x) = f(x) - x$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de fonctions dérivables. Pour tout  $x$  réel,

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= f'(x) - 1 \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 \\
 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
 &= \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 0
 \end{aligned}$$

La fonction  $g$  est donc strictement décroissante. les limites ayant été étudiés précédemment, on a le tableau de variation

$x$	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	
Variations de $g$	$+\infty$  $0$	

La fonction  $g$  est ainsi toujours positive. Par conséquent,

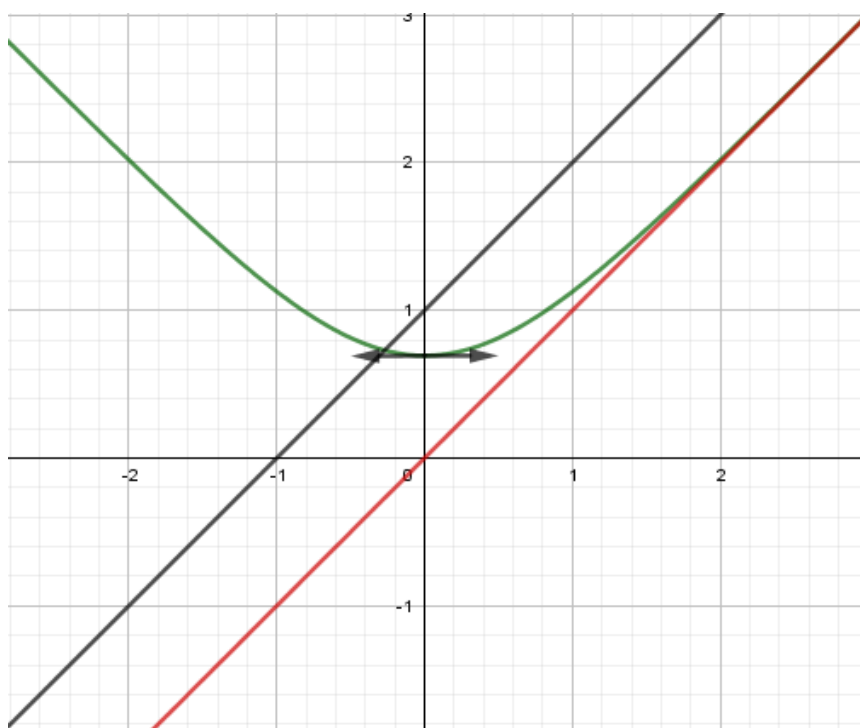
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x.$$

7. On résout

$$\begin{aligned}
 f(x) < x + 1 &\iff \ln(e^x + e^{-x}) < x + 1 \\
 &\iff e^x + e^{-x} < e^{x+1} \\
 &\iff e^x - e \times e^x + e^{-x} < 0 \\
 &\iff (1 - e)e^x + e^{-x} < 0 \\
 &\iff (1 - e)e^{2x} + 1 < 0 \\
 &\iff -(e - 1)e^{2x} < -1 \\
 &\iff e^{2x} > \frac{1}{e - 1} \\
 &\iff 2x > \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right) \\
 &\iff x > \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right)
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc  $\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{e - 1}\right); +\infty \right[.$

8. Tracer sur un même graphique les courbes représentatives de  $f$ ,  $y = x$  et  $y = x + 1$ .



## Partie 2

Étude de la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) = \ln(e^{u_n} + e^{-u_n}) \end{cases}$

1. On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n \text{ est bien définie et } u_n \geq 0\}$ .

- **Initialisation** :  $u_0 = 0$  donc  $u_0$  est bien défini et  $u_0 \geq 0$  donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité** : On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors  $u_{n+1} = f(u_n)$  existe car la fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . De plus

$$\begin{aligned}
 &u_n \geq 0 \\
 \implies &f(u_n) \geq f(0) \quad f \text{ croissante sur } [0; +\infty[
 \end{aligned}$$

Or  $f(u_n) = u_{n+1}$  et  $f(0) = \ln(2) \geq 0$  donc  $u_{n+1} \geq 0$ . Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion :**  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \text{ existe et } u_n \geq 0.}$

2. D'après la partie A, pour tout  $x$  réel,  $f(x) \geq x$ . En prenant  $x = u_n$ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n.$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$

3. D'après la partie A, pour tout  $x$  positif,  $f(x) < x + 1$ . En prenant  $x = u_n$ , on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n + 1.}$$

4. On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n < n + 1\}$ .

- **Initialisation :**  $u_0 = 0$  donc  $u_0 < 1$  donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} u_n &\geq n + 1 \\ \implies u_{n+1} &< u_n + 1 < n + 1 + 1 \\ \implies u_{n+1} &< n + 1 + 1 \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion :**  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n < n + 1.}$

5. On va montrer par récurrence les propositions  $\mathcal{P}_n : \{u_n \leq \ln(n + 1)\}$ .

- **Initialisation :**  $u_0 = 0$  et  $\ln(0 + 1) = 0$  donc l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité :** On suppose que la proposition  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour un certain rang  $n \geq 0$ . On a alors

$$\begin{aligned} u_n &\leq \ln(n + 1) \\ \implies e^{u_n} &\leq n + 1 \\ \implies e^{u_n} + e^{-u_n} &\leq n + 1 + 1 \quad \text{car } e^{-u_n} \leq 1 \\ \implies \ln(e^{u_n} + e^{-u_n}) &\leq \ln(n + 2) \\ \implies u_{n+1} &\leq \ln(n + 2) \end{aligned}$$

Donc la proposition  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie. La suite de proposition  $(\mathcal{P}_n)$  est héréditaire.

- **Conclusion :**  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n < n + 1.}$

## Exercice 7 - Probabilités et suites

On dispose de deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  ainsi que d'une pièce de monnaie non truquée.

Initialement, l'urne  $U_1$  contient une boule blanche et deux boules noires et l'urne  $U_2$  contient deux boules noires.

On considère l'épreuve  $\mathcal{E}$  suivante :

- on lance la pièce
- si l'on obtient pile, on tire une boule de  $U_1$ , sinon on tire une boule de  $U_2$
- si la boule tirée est noire, elle est remise dans la même urne, sinon elle est remise dans l'autre urne.

Pour  $n$  entier naturel non nul, on désigne par  $A_n$  l'évènement

$A_n : \text{" la boule blanche se trouve dans l'urne } U_1 \text{ à l'issue de la } n^{\text{ième}} \text{ répétition de l'épreuve } \mathcal{E} \text{"}$

et par  $B_n$  l'évènement

$B_n : \text{" la boule blanche se trouve dans l'urne } U_2 \text{ à l'issue de la } n^{\text{ième}} \text{ répétition de l'épreuve } \mathcal{E} \text{"}$

1. Dans cette question, on effectue une seule fois l'épreuve  $\mathcal{E}$ .

- (a) La notation  $PiB_1$  signifiant : "la pièce a donné pile et on a tiré la boule blanche de  $U_1$ " (on l'a donc remise dans  $U_2$ ). On calcule  $\zeta$  l'aide de la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P(PiB_1) &= P(Pi) \times P_{Pi}(B_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- (b) Les résultats possibles de l'épreuve  $\mathcal{E}$  sont

$$\boxed{\{PiB_1, PiA_1, FaA_1, FaB_1\}}$$

Remarque : La boule blanche ne se trouvant que dans l'urne  $U_1$  au début, l'évènement  $FaB_1$  est impossible.

- (c) En appliquant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènement  $(Pi, Fa)$ , on a

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(PiA_1) + P(FaA_1) \\ &= P(Pi)P_{Pi}(A_1) + P(Fa)P_{Fa}(A_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

On a alors

$$\boxed{P(B_1) = 1 - P(A_1) = \frac{1}{6}}$$

2. On répète maintenant l'épreuve  $\mathcal{E}$ .

- (a) Si l'on sait que la boule blanche est dans l'urne  $U_1$ , on se trouve dans la même situation qu'au premier tirage. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geq 0, \quad P_{A_n}(A_{n+1}) = P(A_1) = \frac{5}{6} \text{ et } P_{A_n}(B_{n+1}) = P(B_1) = \frac{1}{6}}$$

- (b) On se place dans le cas où la boule blanche est dans l'urne  $U_2$  à la  $n^{\text{ème}}$  expérience. En appliquant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'évènement  $(Pi, Fa)$ , on a

$$\begin{aligned} P_{B_n}(A_{n+1}) &= P_{B_n}(Pi \cap A_{n+1}) + P_{B_n}(Fa \cap A_{n+1}) \\ &= P_{B_n}(Pi) \times P_{B_n \cap Pi}(A_{n+1}) + P_{B_n}(Fa) \times P_{B_n \cap Fa}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

On a alors

$$\boxed{P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{5}{6}}$$

- (c) On notera  $a_n = P(A_n)$  et  $b_n = P(B_n)$ . Les évènements  $(A_n, B_n)$  forment un système complet d'évènements. En utilisant la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{5}{6} + b_n \times \frac{1}{6} \\ a_{n+1} &= \boxed{\frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n} \end{aligned}$$

De la même façon,

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{6} + b_n \times \frac{5}{6} \\ b_{n+1} &= \boxed{\frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n} \end{aligned}$$

- (d)  $(A_n, B_n)$  forme un système complet d'évènement, donc

$$\boxed{P(A_n) + P(B_n) = a_n + b_n = 1}$$

Soit  $n \geq 0$ , on a d'une part

$$a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n,$$

d'autre part

$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{5}{6}b_n \iff b_n = \frac{6}{5}b_{n+1} - \frac{1}{5}a_n$$

donc

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{6} \left( \frac{6}{5}b_{n+1} - \frac{1}{5}a_n \right) \\ \iff a_{n+1} &= \frac{5}{6}a_n + \frac{1}{5}b_{n+1} - \frac{1}{30}a_n \\ \iff a_{n+1} &= \frac{24}{30}a_n + \frac{1}{5}(1 - a_{n+1}) \\ \iff a_{n+1} + \frac{1}{5}a_{n+1} &= \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5} \\ \iff \frac{6}{5}a_{n+1} &= \frac{4}{5}a_n + \frac{1}{5} \\ \iff a_{n+1} &= \frac{5}{6} \times \frac{4}{5}a_n + \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} \\ \iff a_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

On a également,

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= 1 - a_{n+1} \\
 &= 1 - \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{6} \\
 &= \frac{5}{6} - \frac{2}{3}(1 - b_n) \\
 &= \frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}b_n \\
 &= \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall n \geq 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} \\ b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{6} \end{cases}$$

- (e) On a deux suites arithmético-géométrique ayant pour termes initiaux  $a_1 = \frac{5}{6}$  et  $b_1 = \frac{1}{6}$ . On résout l'équation

$$\begin{aligned}
 x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} &\iff \frac{1}{3}x = \frac{1}{6} \\
 &\iff x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

On pose la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_n = a_n - \frac{1}{2}$ . On vérifie que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique. Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= a_{n+1} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{2}{3}a_n - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{2}{3} \left( a_n - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{2}{3}u_n
 \end{aligned}$$

De plus  $u_1 = a_1 - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ . On a alors  $u_n = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1}$  et finalement

$$a_n = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$

Enfin,  $b_n = 1 - a_n$  donc

$$b_n = -\frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} + \frac{1}{2}.$$